Konvolucija

Da se podsetimo – važnost konvolucije

Kontinulan LTI sistem

Odziv sistema na Dirakov impuls se naziva impulsni odziv sistema
Rešenje diferencijalnih jednačina koje opisuju sistem

$$h(t) = O\{\delta(t)\}$$

Diskretan LTI sistem

Odziv sistema na Dirakov impuls se naziva impulsni odziv sistema
Rešenje diferencnih jednačina koje opisuju sistem

$$h[n] = O\{\delta[n]\}$$

Odziv diskretnog sistema na proizvoljnu pobudu

Sistem pobuđujemo nekim diskretnim signalom $x[n]$
Ako taj signal predstavimo sumom parcijalnih nizova koji imaju samo jedan član različit od nule

$$x[-1] = x[-1]\delta[n+1]\begin{cases} x[-1] & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Uočiti

$$x[0] = x[-1]\delta[n]\begin{cases} x[0] & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1] = x[1]\delta[n-1]\begin{cases} x[1] & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Odziv sistema

$$y[n] = O\{x[n]\} = O\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]O_k\{\delta[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

Odziv na $\delta[n-k]$ u „trenutku“ n je $h_k[n]$ - na vremenski pomeren delta impuls za k

Odziv na $\delta[n]$ je $h_0[n]$

$$O\{\delta[n]\} = h_0[n] = h[n]$$

Za LTI sisteme „vremenski“ pomeren delta impuls

$$O_k\{\delta[n]\} = h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \xRightarrow{sistem\ kauzalan\ h[n]=0, n<0} = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \xrightarrow{k=n-l} = \sum_{l=0}^{+\infty} h[l]x[n-l]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k] \xRightarrow{signal\ kauzalan\ x[n]=0, n<0} = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \xrightarrow{k=n-l} = \sum_{l=0}^{n} x[l]h[n-l]$$

+	+	+	+	+		
$x[0]h[0]$	$x[0]h[1]$	$x[0]h[2]$	$x[0]h[3]$	$x[0]h[4]$	·	Impulsni odziv na $x[0]$
	$x[1]h[0]$	$x[1]h[1]$	$x[1]h[2]$	$x[1]h[3]$	·	Impulsni odziv na $x[1]$
		$x[2]h[0]$	$x[2]h[1]$	$x[2]h[2]$	·	Impulsni odziv na $x[2]$
			·	·	·	
y[0]	y[1]	y[2]	y[3]	y[4]		Superpozicija

n

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

Pitanje: A zašto ne ovako

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[k-n]$$

Odziv sistema

$$y[n] = O\{x[n]\} = O\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[k-n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]O_k\{\delta[-n]\} \neq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[k-n]$$

Za LTI sisteme „vremenski“ pomereno – isto je pomeren za k pa i odziv kasni isto toliko

Odziv na $\delta[n] = \delta[-n]$ je $h_0[n]$

$$O_k\{\delta[-n]\} = h[n]$$

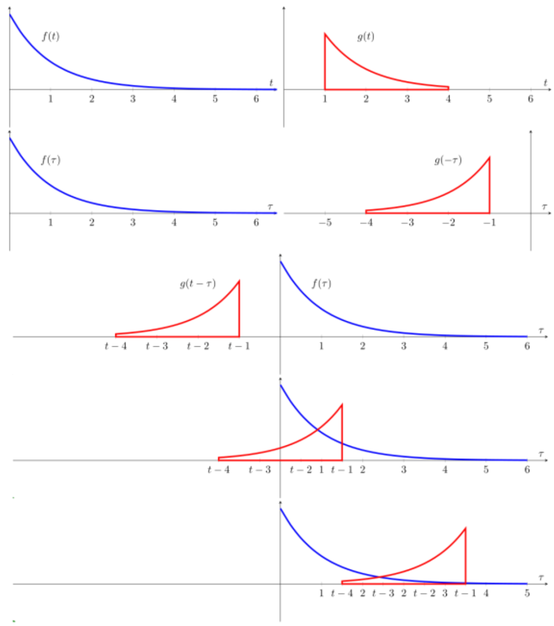
$$O_k\{\delta[n]\} = h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = f(t) * g(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$



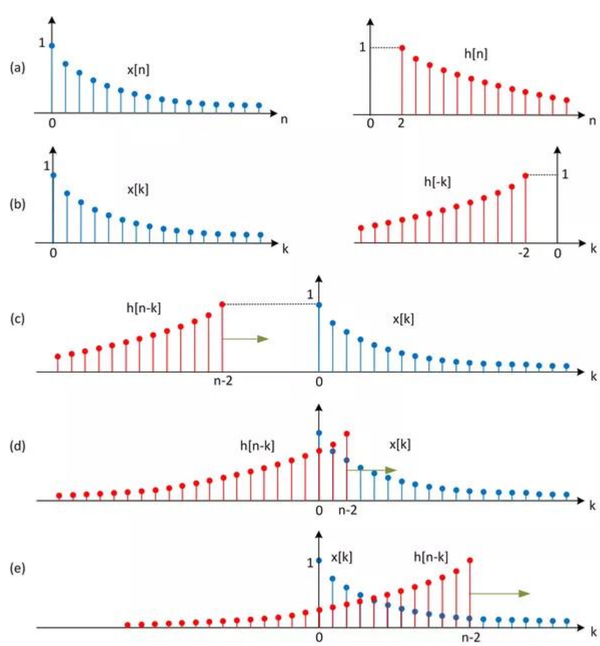
7

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

1. Sistem kauzalan
   $h[n] = 0 \; za \; n < 0$
2. Signal kauzalan
   $x[n] = 0 \; za \; n < 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$



8

Računanje u vremenskom i frekvencijskom domenu

$$x(t) \to \mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$$

$$y(t) = O\{x(t)\} \to \mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega)$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

Funkcija prenosa sistema u frekvencijskom domenu

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega) \cdot H(j\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = w(t) \cdot x(t)$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{w(t) \cdot x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(j\theta)X(j(\theta-\omega))d\theta = W(j\omega) * X(j\omega)$$

Računanje linearne konvolucije preko DFT

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

N_x $-$ *dužina* $x[n]$ $\quad$ N_h $-$ *dužina* $h[n]$

I dve „poslednje" tačke kada se preklope, dužina $y[n]$ je

$$N_y = N_x + N_h - 1$$

Ako ovo želimo da izračunamo, ili računamo, u frekvencijskom domenu

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k]$$

dobijamo DFT sekvencu signala $y[n]$ u N_y tačaka

Treba da dobijemo

Znači DFT spektri $X[k]$ i $H[k]$ takođe moraju biti izračunati u N_y tačaka.

Množenje tačka po tačka.

Znači $x[k]$ i $h[k]$ takođe moramo dopuniti odgovarajućim brojem nula.

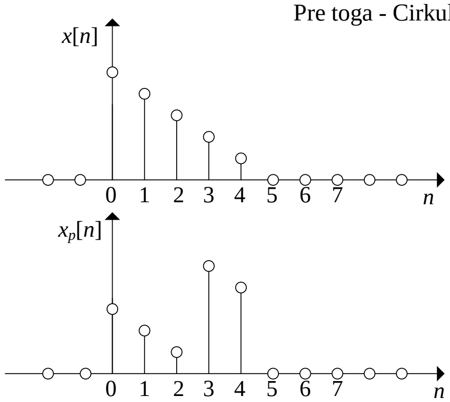
$$N_{zx} = N_y - N_x = N_h - 1 \qquad N_{zh} = N_y - N_h = N_x - 1$$

Kako sada ovo računati, pogotovo ako su sekvence „drastično“ različite po dužini
biće tema u nekim narednim slajdovima

Često u praksi je $N_x \gg N_h$

Međutim, za sada ćemo uvesti pojam Cirkularne konvolucije kao
posledice periodičnog produženja koje „radi“ DFT

Pre toga - Cirkularni pomeraj neke sekvence



Dužina sekvence 5

Cirkularni pomeraj u
levo za dva odmerka
2 -> 0, 3 -> 1, 4 -> 2
2-2=0, 3-2=1, 4-2=2
ali
0 -> 3 i 1 -> 4
0+5-2=2, 1+5-2=4

Uočite $\quad x[n+m] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} W_N^{-mk} X[k]$

twiddle factor $\quad W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$

$$W_N^{-mk} = e^{+j\frac{2\pi}{N}mk}$$

podsećanje

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n+m] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$Y[k] = e^{+j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{n=0}^{N-1} x[n+m] e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+m)}$$

$$Y[k] = e^{+j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{l=m}^{N-1+m} x[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} = e^{+j\frac{2\pi}{N}km} \sum_{l=0}^{N-1} x[l] e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$$

Periodično produženje

$$\ldots = x[-N+l] = x[l] = x[N+l] = \cdots$$

$$\ldots = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(-N+l)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(l)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N+l)} = \cdots$$

Primer: $m = 3 \;\Rightarrow l = 3, 4, \ldots, N-1, (N-1+1)(0), (N-1+2)(1), (N-1+2)(2)$

Računanje po modulu N

$$Y[k] = e^{+j\frac{2\pi}{N}km} X[k]$$

Ili ako Vam je lakše da vidite

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x[n+m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}(n+m)k}$$

$$x[n+m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left(X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Kako algoritamski računati konvoluciju korišćenjem ideje DFTa

Šta je konvolucija dva periodična signala?

$$Y[k] = X[k]H[k]$$

Videli smo da moraju i podrazumevamo da su sve sekvence iste dužine N

Inverzna DFT

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]H[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1} h[l]e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left(\sum_{l=0}^{N-1} h[l]\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-l-m)}\right)\right)$$

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\left(\sum_{l=0}^{N-1} h[l]\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-l-m)}\right)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-l-m)} = \begin{cases} N & l = n-m+pN \\ 0 & l \neq n-m+pN \end{cases} \qquad p \in Z$$

odnosno

$$l = n-m+pN \Leftrightarrow l = (n-m) \bmod N$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m) \bmod N] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h\langle n-m\rangle_N$$

Cirkularna konvolucija

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h\langle n-m\rangle_N = x[n]\otimes h[n]$$

Znači: Računanje odziva sistema na proizvoljnu pobudu $x[n]$

Prvi pristup

Znamo ili smo izračunali $H[k] = \mathrm{DFT}\{h[k]\}$

Računamo $X[k] = \mathrm{DFT}\{x[k]\}$

Računamo $Y[k] = X[k]H[k]$

Sve u istom broju tačaka

Računamo $y[n] = \mathrm{IDFT}\{Y[k]\}$

Drugi pristup

Računamo cirkularnu konvoluciju $y[n] = x[n]\otimes h[n]$

Mora biti ista perioda svih signala bilo za prvi bilo za drugi pristup
Cirkularna konvolucija važi za periodične signale. Možemo je iskoristiti i za računanje u frekvencijskom domenu, kada smo imali množenje u vremenskom domenu.

Koji pristup je bolji: Onaj koji je za dati problem brži

Chirp transform algorithm

Da se podsetimo

Spektar određen odmercima
odnosno brojem tačaka N
DTFT

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

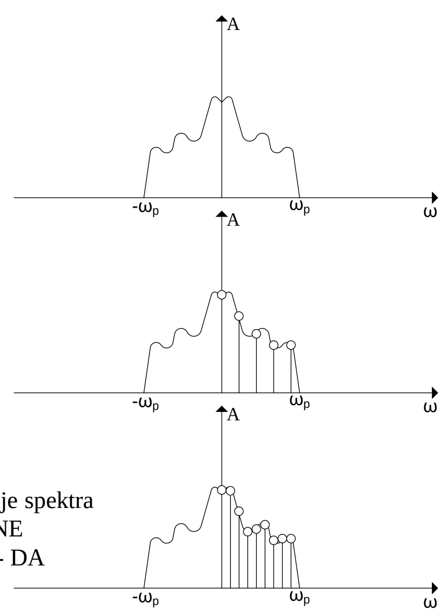
DFT

$$X\left[k\frac{2\pi}{N}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Dodavanje nula - zero padding

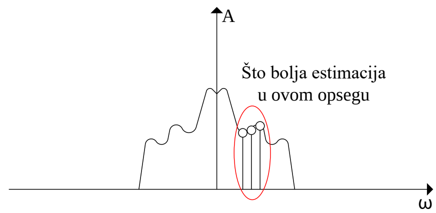
Pokušaj bolje estimacije spektra
1. ulaznog signala - NE
2. signala odmeraka - DA

$$X\left[k\frac{2\pi}{M}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{M}n}$$



FFT je implementacija DFT efikasna sa stanovišta brzine izračunavanja
Pričaćemo puno o tome. Nije nova transformacija. Algoritam.
Radi računanje nad svim odmercima i daje sve spektralne linije DFTa.

Rezolucija učestanosti u kojima se izračunava $2\pi/N$, gde je N dužina ulazne sekvence. Dodavanje nula do M tačaka, povećava broj tačaka u kojem će biti računato. Rastojanje između tačaka $2\pi/M$. FFT u M tačaka. Dugo izračunavanje.



U praksi je česta situacija da nas ne interesuje dobra estimacija u celom opsegu frekvencija.

2,5GHz trebala bi nam rezolucija na celom opsegu od 5Ghz.
A nas interesuje šta se dešava samo u okolini 2,5GHz, odnosno, interesuje nas da što tačnije dobijemo informaciju o učestanostima u nekom užem (znatno užem) opsegu.

Ideja: računamo Furijeovu transformaciju DTFT samo u tačkama

$$\Omega_n = \Omega_0 + n\Delta\Omega \qquad n = 0,1,\ldots,M-1$$

DFT predstavlja samo specijalni slučaj ovakvog procesa izračunavanja gde je
$M = N$ (N broj odmeraka u ulaznoj sekvenci)
$\Omega_0 = 0$
$\Delta\Omega = 2\pi/N$

Po definiciji

$$X(j\Omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j\Omega_n k} \qquad n = 0,1,\ldots,M-1$$

$$W = e^{-j\Delta\Omega}$$

$$X(j\Omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j\Omega_0 k}W^{nk}$$

$$X(j\Omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\Omega_0 k} W^{nk}$$

smena $\quad nk = \frac{1}{2}\left(k^2 + n^2 - (n-k)^2\right)$

$$X(j\Omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\Omega_0 k} W^{\frac{k^2}{2}} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(n-k)^2}{2}}$$

Zašto ova smena i zašto ovaj oblik?

Postoje hardverske realizacije za brzo računanje konvolucije! Gde je konvolucija?

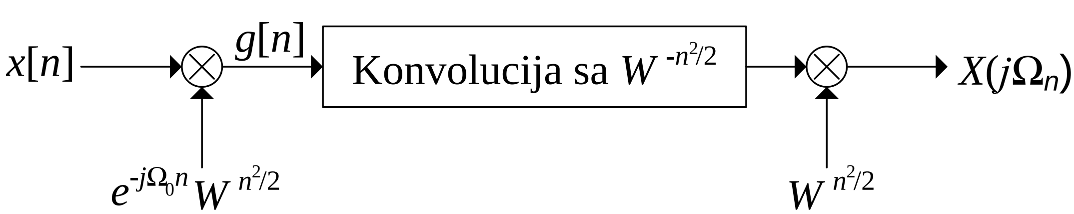
$$g[k] = x[k] e^{-j\Omega_0 k} W^{\frac{k^2}{2}}$$

$$X(j\Omega_n) = W^{\frac{n^2}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} g[k]\, W^{-\frac{(n-k)^2}{2}} \qquad n = 0,1,\dots,M-1$$

Konvolucija $g[k]$ sa $W^{-\frac{(n)^2}{2}}$

$$X(j\Omega_n) = W^{\frac{n^2}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} g[k]\, W^{-\frac{(n-k)^2}{2}} \qquad n = 0,1,\dots,M-1$$

$$g[k] = x[k] e^{-j\Omega_0 k} W^{\frac{k^2}{2}}$$



Sam po sebi nije optimalan po broju množenja, sabiranja ...
Ali može da bude brže od klasičnih algoritama koji računaju u svim tačkama.

Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Računanje linearne konvolucije pomoću cirkularne konvolucije

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

N_x $-$ *dužina* $x[n]$ N_h $-$ *dužina* $h[n]$

I dve „poslednje" tačke kada se preklope, dužina $y[n]$ je

$$N_y = N_x + N_h - 1$$

Znači $x[k]$ i $h[k]$ takođe moramo dopuniti odgovarajućim brojem nula.

$N_{zx} = N_y - N_x = N_h - 1$ $N_{zh} = N_y - N_h = N_x - 1$

I onda računamo cirkularnu konvoluciju

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N_y-1} x[m]h\langle n-m\rangle_N = x[n]\otimes h[n]$$

????? Što bi to radili pogotovo ako su jako različite po dužini. Puno nula.

Računaćemo primenom DFTa, nekim brzim algoritmom računanja (FFT)

Izbor broja tačaka $N \geq N_y$ i $N = 2^p$ što zahteva FFT

Upoređujemo broj množenja i broj sabiranja sa direktnom primenom konvolucije

Za DFT (FFT)

1. Broj operacija za izračunavanje $X[k]$ i $H[k]$ iz $x[n]$ i $h[n]$,
2. Broj operacija za izračunavanje $Y[k] = X[k]H[k]$, $k = 0,1,..., N-1$,
3. Broj operacija za izračunavanje $y[n]$ iz $Y[k]$.

$$N_M = 3(2N\log_2 N) + 4N = 6N\log_2 N + 4N$$

$$N_A = 3(3N\log_2 N) + 2N = 9N\log_2 N + 2N$$

Direktna primena konvolucije po definiciji

$$N'_M = N_x N_h$$

$$N'_A = (N_x - 1)(N_h - 1)$$

Primer
$N_x = 512$, $N_h = 512$, $N = 1024$.

Onda je za DFT (FFT)
$N_M = 65536$ *i* $N_A = 94208$,

A za direktnu primenu konvolucije
$N_M' = 262144$ *i* $N_A' = 261121$.

Vidi se da je za primenu DFTa potrebno svega 25% množenja i 36% sabiranja u odnosu na broj operacija kod direktne metode.

Ukoliko se primeni neki efikasniji FFT algoritam ušteda može biti i veća.

Šta raditi ako su dužine sekvenci $x[n]$ *i* $h[n]$ jako različite?

(I obično je sekvenca $x[n]$ *znatno duža)*

Efikasno izračunavanje linearne konvolucije dve sekvence izrazito različitih dužina može se ostvariti ako se

1. duža sekvenca podeli na segmente
2. formiraju parcijalne konvolucije između segmenata duže sekvence i kraće sekvence
3. „saberu“ parcijalne konvolucije

Takav metod poznat je pod nazivom

Blok konvolucija

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju

$x[n]$ se deli na S parcijalnih sekvenci dužine L prema izrazu

$$x[n] = \sum_{i=0}^{S-1} x_i[n], \quad n = 0,1,\ldots,SL-1$$

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL \le n \le (i+1)L-1 \\ 0, & \text{za druge vrednosti } n \end{cases}$$

U tom slučaju konvoluciju možemo da prikažemo kao

$$y[n]=\sum_{m=0}^{N_h-1}\sum_{i=0}^{S-1}x_i[n-m]h[m]=\sum_{i=0}^{S-1}\sum_{m=0}^{N_h-1}x_i[n-m]h[m]=\sum_{i=0}^{S-1}c_i[n]$$

$c_i[n]$ predstavlja linearnu konvoluciju segmenata ulazne sekvence $x[n]$ i sekvence $h[n]$

Zašto do $N_h -1$? N_h je nenultih elementa u sekvenci $h[n]$.

Znači, svaka parcijalna konvolucija ima $L + N_h -1$ elemenata različitih od nule

Dopunjavanje nulama parcijalnih segmenata x i h da bi se koristila cirkularna konvolucija (sada ima smisla pošto su „približne“ po dužini) odnosno DFT odnosno FFT

- •Proširenje sekvenci $x_i[n]$ i $h[n]$ do dužine N sa nultim vrednostima
- •DFT sekvence $h[n]$
- •S puta DFT parcijalnih sekvenci $x_i[n]$
- •Množenjem $H[k]$ sa $X_i[k]$ član po član dobija se $C_i[k]$
- •Iz $C_i[k]$ se inverznom DFT dobijaju parcijalne konvolucije $c_i[n]$
- •„Sabiranje“ $c_i[n]$

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju

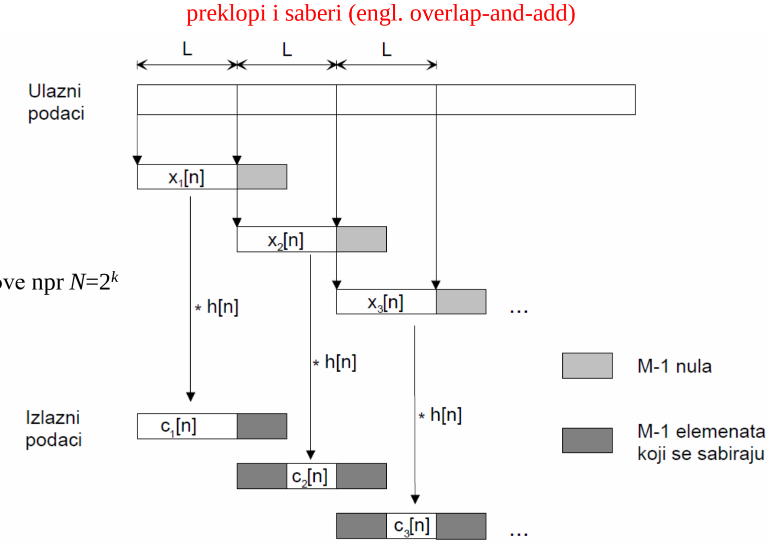
preklopi i saberi (engl. overlap-and-add)

$M >= N_h$

Dodatne nule možda potrebne i za nešto drugo

$N = L + M -1$

N zadovoljava „neke“ uslove npr $N=2^k$



Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence <u>preklapaju</u>

Ideja: podela ulazne sekvence koja omogućava da se izlazna sekvenca formira direktno, bez sabiranja pojedinih delova. Samo dodavanjem u sekvencu!

Ideja: uzimati samo one elemente parcijalnih konvolucija koji predstavljaju korektan rezultat!

Šta je korektan rezultat?

Prelazni režim pri konvoluciji ulazne sekvence sa impulsnim odzivom $h[n]$ dužine N_h traje $N_h - 1$ odbiraka.

Zbog toga se segmentacija ulazne sekvence vrši tako da se segmenti preklapaju za $N_h - 1$ elemenata.

Dužina svakog segmenta $L + N_h - 1$

Prvi segment se proširuje sa $N_h - 1$ nula sa leve strane

Da se podsetimo

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

Neka je dužina impulsnog odziva 3

+	+	+	+	+		
$x[0]h[0]$	$x[0]h[1]$	$x[0]h[2]$				Impulsni odziv na $x[0]$
	$x[1]h[0]$	$x[1]h[1]$	$x[1]h[2]$			Impulsni odziv na $x[1]$
		$x[2]h[0]$	$x[2]h[1]$	$x[2]h[2]$		Impulsni odziv na $x[2]$
			$x[3]h[0]$	$x[3]h[1]$		Impulsni odziv na $x[3]$
				$x[4]h[0]$		Impulsni odziv na $x[4]$
y[0]	y[1]	y[2]	y[3]	y[4]	…	Superpozicija

Prelazni režim n

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence preklapaju

Proširena sekvenca $x[n]$ se deli na S parcijalnih sekvenci dužine $L+N_h$-1 prema izrazu

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL - N_h + 1 \le n \le (i+1)L - 1 \\ 0, & \text{za druge vrednosti } n \end{cases}$$

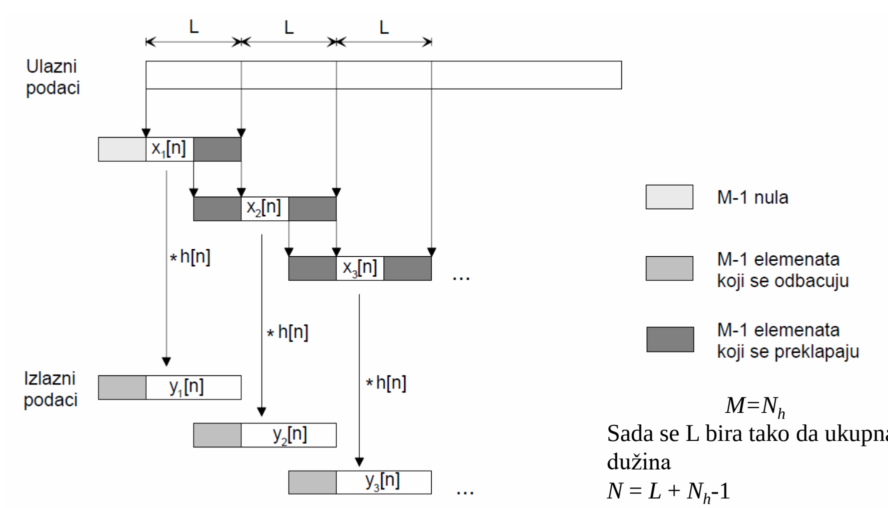
$$y[n] = \sum_{i=0}^{S-1} y_i[n]$$

$y_i[n]$ rezultati parcijalnih cirkularnih konvolucija iz kojih je izbačeno prvih $N_h - 1$ elementa

33

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence preklapaju

selektuj i sačuvaj (engl. select-save ili overlapsave)



$M=N_h$

Sada se L bira tako da ukupna dužina

$N = L + N_h$-1

Zadovoljava „neke" uslove npr $N=2^k$

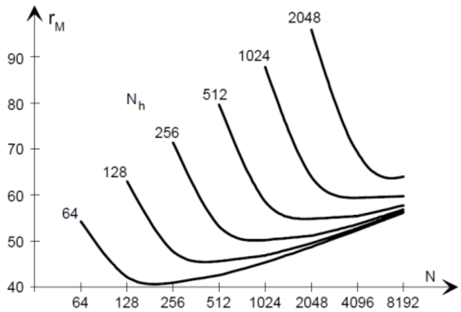
34

Problem izbora L

Kriterijum: Da bi se dobilo što efikasnije izračunavanje
Što manji broj aritmetičkih operacija!

Primer: Broj množenja po jednom odbirku za blok konvoluciju po metodu preklopi i saberi iznosi:

$$r_M(N) = \frac{4N\log_2 N + 4N}{L} = \frac{4N(\log_2 N + 1)}{N - N_h + 1} \approx \frac{2^{p+2}(p+1)}{2^p - N_h}$$



Za dato N_h postoji optimalna vrednost N (odnosno L) za koju je potreban minimalni broj množenja. Na slici je prikazana zavisnost $r_M(N)$ sa dužinom impulsnog odziva N_h kao parametrom.

Sa slike se vidi da se kriva u oblasti minimuma malo menja i da je optimalna vrednost $N \approx 5Nh$.

Zadatak 2 (25 poena)
Digitalni sistem ima impulsni odziv:

$$h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2]$$

Na ulaz ovog sistema se može dovesti proizvoljan signal velike dužine.
Zbog toga se izračunavanje odziva sistema na pobudu veće dužine izračunava blok konvolucijom kada se segmenti ulazne sekvence preklapaju (metod selektuj i sačuvaj – *select-and-save* ili *overlap-and-save*).
Dužina segmenata je $L = 4$.
Neka je ulazni signal:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4] - \delta[n-6]$$

a) [5] Izračunajte minimalnu potrebnu dužinu N na kojoj treba izračunavati DFT u postupku izračunavanja blok konvolucije korišćenjem DFT.
b) [15] Izračunajte rezultate obrade prva dva bloka signala $x[n]$: $y_1[n]$ i $y_2[n]$.
c) [5] Korišćenjem rezultata iz tačke b) odredite odziv

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3] = [2,0,1]$$

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4] - \delta[n-6] = [1,-1,0,-4,2,0,-1]$$

a) $N_h = 3$ Dužina svakog bloka $L + N_h - 1 = 6$ Izlaz N_y dužine 9

$h[n] = [2, 0, 1, 0, 0, 0]$

$x_o[n] = [1, -1, 0, -4, 2, 0, -1, 0]$

$x_1[n] = [0, 0, 1, -1, 0, -4]$

$x_2[n] = \quad [0, -4, 2, 0, -1, 0]$

$x_3[n] = \quad [-1,0,0,0,0,0]$

Krećemo sa leve strane, preklapamo, dok ne „potrošimo sve pobude“

Lakše cirkularna, papir i olovka, ako je dozvoljeno na ispitu, ili za proveru

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N_y-1} x[m]h\langle n-m\rangle_N = x[n] \otimes h[n]$$

37

$$y_1[0] = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} = 0$$

$$y_1[1] = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} = -4$$

$$y_1[2] = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} = 2$$

$\ldots$

$y_1[n] = [0, -4, 2, -2, 1, -9]$

$y_2[n] = [-1, -8, 4, -4, 0,0]$

$y_3[n] = [-2, 0, -1, 0, 0,0]$

$y[n] = [\, 2, -2, 1, -9, 4, -4, 0, 0, -1, 0, 0, 0]$

38